trigonométrie et implantation des édifices : la vieille histoire des nombres incommensurables

par Frédéric MORIN, architecte DPLG 1982

Le nom usuel de la mesure de base en terre d'Islam est *dhira'* dont la traduction littérale est *coudée*. Cette unité de mesure correspond à la longueur entre le coude et le plus long des doigts de la main. Les spécialistes se sont jusqu'ici perdus dans le grand nombre de valeurs données et attestées pour ces coudées. HINZ a fait le point sur la question (1) en précisant que la coudée est normalement divisée en six largeurs de mains (*kabda*) chacune encore divisée en quatre doigts. HINZ retient quatre coudées principales : la coudée légale (*al-dhira' al-shar'iyya*) d'une longueur de 0,4825m environ sous les 'Abbassides de Baghdad, la coudée «noire» (*dhira' al-sawda*) de 0,5404m mesurée sur le Nilomètre de l'île d'al-Rawda dont il donne une datation 'abbasside (861 ap. J.-C.), la coudée «royale» (*dhira' al-malik*) dont il précise qu'elle correspond à huit largeurs de mains et non pas six, ce qui fixe sa longueur à 0,656m, et la coudée à drap qui à Damas (autrefois capitale du califat umayyade) mesure 0,63m. Malheureusement, HINZ oublie la coudée umayyade relevée à al-Muwaqqar pour une longueur de 0,45m+/-0,005m d'une part, et d'autre part il n'imagine en aucune manière que ces nombreuses coudées puissent être liées par quelque relation que ce soit.

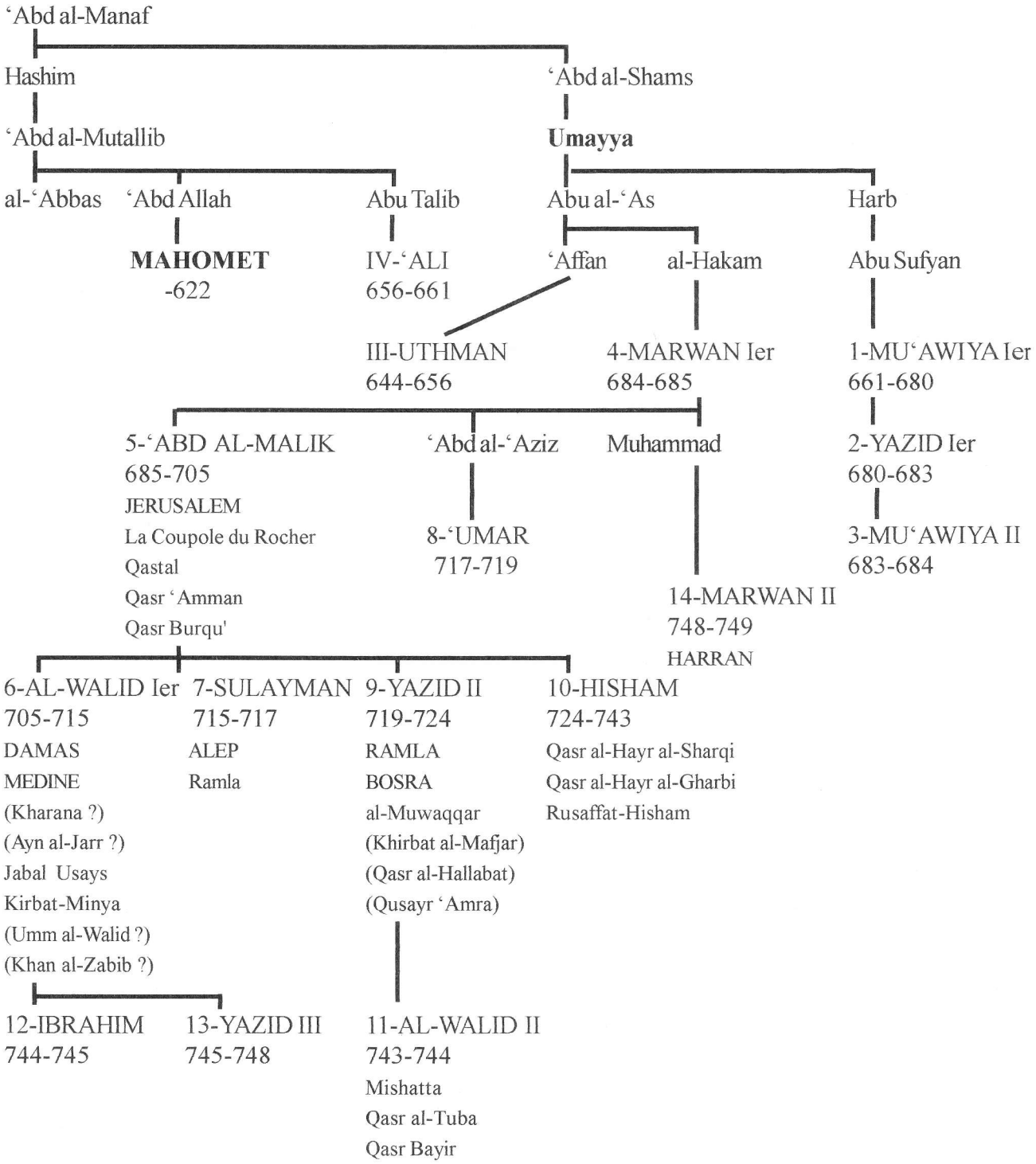
Architecte sur la mission archéologique du palais umayyade de Qastal al-Balqa' en Jordanie (2) dont il a pu être démontré qu'il avait été construit par 'Abd al-Malik ibn Marwan, le premier calife umayyade bâtisseur (785-705 ap. J.-C.), constructeur de la Coupole du Rocher à Jérusalem, j'avais été intrigué par le fait que certaines mesures revenaient de manière systématique : 0,45m, 0,53m, 0,63m, 1,05m (pour le double de 0,53m), 1,25m (pour le double de 0,63m) pour l'essentiel. Ces trois mesures étaient donc utilisées simultanément, par exemple pour le dallage en pierre de la cour du château, les hauteurs d'assise de belle pierre calcaire alternant carreaux et boutisses, les dimensions des carreaux, etc. Ces trois mesures sont connues ; la coudée de 0,45m est précisément identifiée comme la coudée umayyade (0,45m+/-0,005m) découverte sur une jauge hydrométrique à al-Muwaqqar (site umayyade jordanien) en association avec une inscription datée 722-3 ap. J.-C. du règne de Yazid II (719-724 ap. J.-C.)(3).

Un autre fait aiguillonna ma curiosité : à l'instar de beaucoup d'autres édifices de cette première période musulmane dont les plans avaient été publiés, le plan général du palais de Qastal, relevé par mes soins comme étant globalement carré, révélait des déformations angulaires qui rendaient fort improbable l'utilisation du procédé de piquetage hérité de l'Antiquité pythagoricienne basé sur le 3-4-5 ($3^2+4^2=5^2$) dont on peut observer la mise en oeuvre dans les édifices byzantins immédiatement antérieurs, sauf à accuser les architectes et hommes de l'art musulmans d'incapacité, comme il en est de mode depuis Auguste CHOISY et son «*Histoire de l'Architecture*» (tome II, page 80).

Il a été assez facile de constater que les grands côtés ouest et sud du palais (67,80m) avaient été mesurés à la longueur de 150 coudées umayyade (0,452m). Par contre, un petit brin d'originalité intellectuelle a été précieux pour s'intéresser aux valeurs des diagonales, ce que personne n'avait fait avant moi. Celle-ci (95,00m) est divisible non pas par la coudée umayyade de 0,452m mais par la grande coudée de 0,63m connue par bien des textes, pour s'établir à 150 coudées de 0,63m.

C'est la raison pour laquelle j'assume que les constructeurs umayyades, sinon les Umayyades eux-mêmes, exploitaient un système de mesures élaboré basé sur différentes mesures de différentes longueurs, certaines pour mesurer les côtés des édifices et d'autres pour mesurer les diagonales.

Il est possible d'obtenir la longueur de la grande coudée de 0,63m à partir de la coudée umayyade de 0,45m sans aucun outil. Il convient de prendre une pièce de tissus suffisament grande de deux coudées au carré au minimum. Il faut la plier en deux une première fois, puis en deux une nouvelle fois en superposant les bords pliés intialement : on dispose ainsi d'un angle magnifiquement droit. De cha-



1) LA DYNASTIE DES UMAYYADES (661-750 ap. J.-C.) : leurs capitales et leurs réalisations architecturales en chiffres romains, l'ordre des califes antérieurs aux Umayyades, en chiffres arabes l'ordre des califes umayyades en capitales, les villes qu'ils ont marquées de leurs empreinte, en bas-de-casse les châteaux et sites qu'ils ont créés ou occupés (entre parenthèses).

que côté de cet angle, les deux points distants d'une coudée umayyade de 0,45m mesurée depuis l'angle à 90° seront distants entre-eux de 0,63m. La grande coudée de 0,63m est la diagonale d'un carré de 0,45m de côté. Il faut ici relever que la *coudée à drap* de Damas (qui fut la capitale du califat umayyade) mentionnée par HINZ mesure précisément 0,63m.

De cette expérience, faut-il vraiment une imagination débordante pour conclure que l'on puisse espérer implanter un édifice carré (ou supposé tel) en mesurant N coudées umayyades pour les côtés et ce même N fois la longueur de la diagonale mesurée sur le drap plié, à savoir N grandes coudées pour la diagonale ?

Telle qu'elle est décrite, cette expérience peut être faite sans aucune connaissance mathématique, géométrique ou trigonométrique. Néanmoins, elle matérialise la relation trigonométrique suivante entre la coudée umayyade et la grande coudée, ici donnée pour les deux valeurs extrêmes de la coudée umayyade relevées à al-Muwaqqar :

0,445m / Cos 45° = 0,445m x $\sqrt{2}$ = 0,6293...m

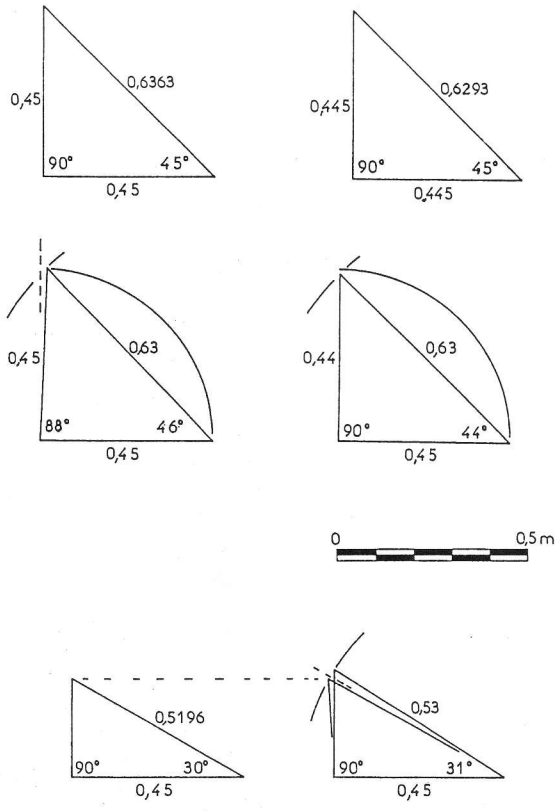
0,450m / Cos 45° = 0,450m x $\sqrt{2}$ = 0,6363...m

A la suite de cet exemple, une autre relation trigonométrique doit être relevée entre la coudée umayyade et la coudée de 0,53m (que je soupçonne d'être une valeur umayyade de la *coudée noire* dite 'abbasside) :

0,450m / Cos 30° = 0,450m x 2/$\sqrt{3}$ = 0,5196...m

L'approximation doit être relevée ; sa grossièreté et les déformations qu'elle entraîne en feront identifier l'usage de manière certaine par exemple pour la mosquée umayyade de Qastal.

Nombre des différentes coudées mentionnées par HINZ peuvent ainsi être associées les unes avec les autres par des relations trigonométriques, en sus des relations arithmétiques mentionnées par les textes arabes mais restées inexplorées par les auteurs contemporains.



2) présentation graphique des relations trigonométriques entre les coudées de 0,45m, 0,445m et 0,63m d'une part, et 0,45m et 0,53m d'autre part.

Les plans des édifices umayyades présentent toujours des déformations : il n'y a pas d'angles rigoureusement droits. Les relations trigonométriques présentées ci-dessus n'ont pas été mises en oeuvre dans le détail des décimales : il en résulte que ces imperfections des implantations umayyades aujourd'hui mesurables trouvent une explication dans la mise en oeuvre d'un procédé imparfait dans l'étalonnage des mesures. Mieux encore : ces déformations permettent de reconstituer le travail des arpenteurs qui n'ont de cesse d'améliorer leurs procédés.

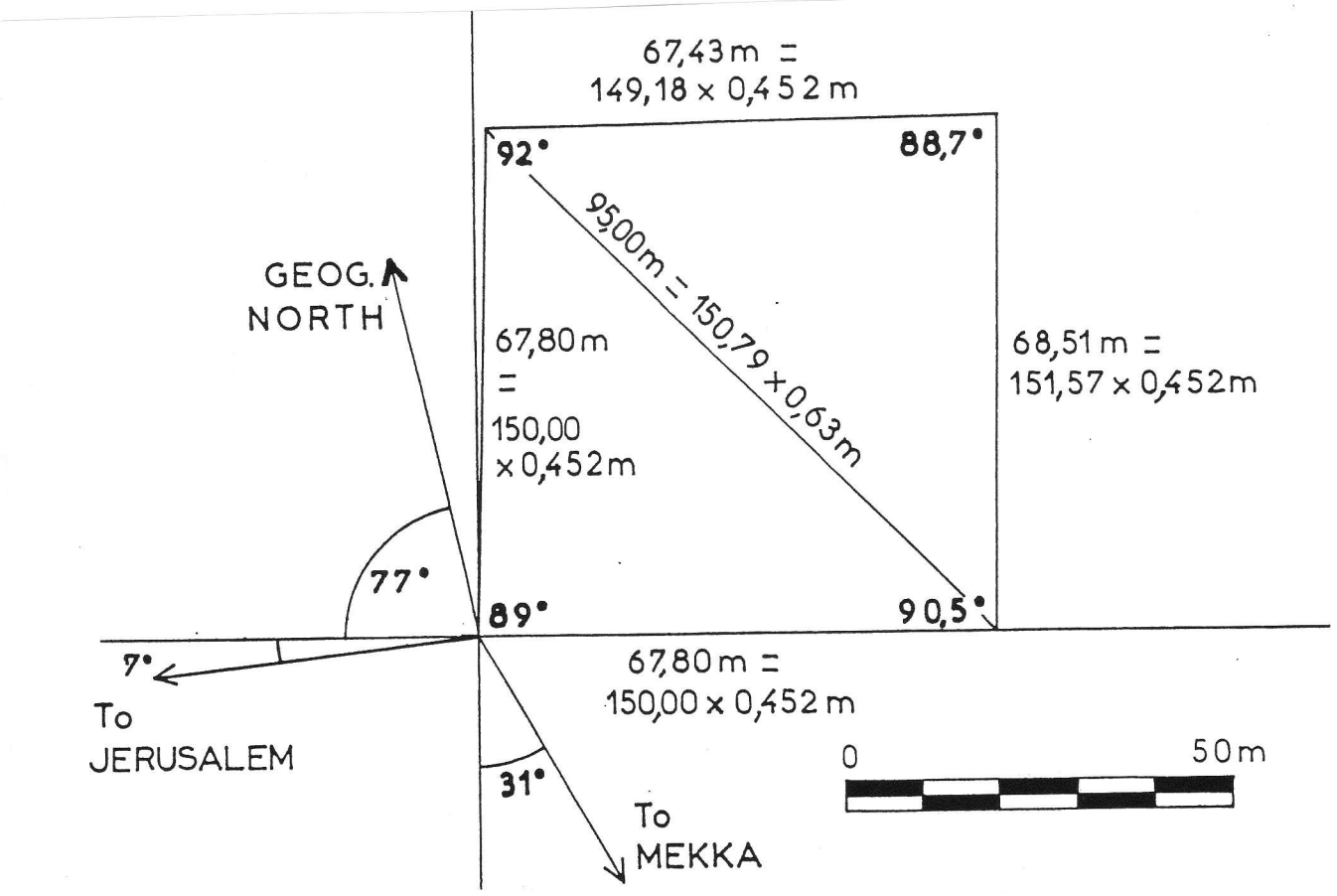
les procédés d'implantation à Qastal:

On peut imaginer que les constructeurs d' 'Abd-al-Malik ont commencé par le palais :

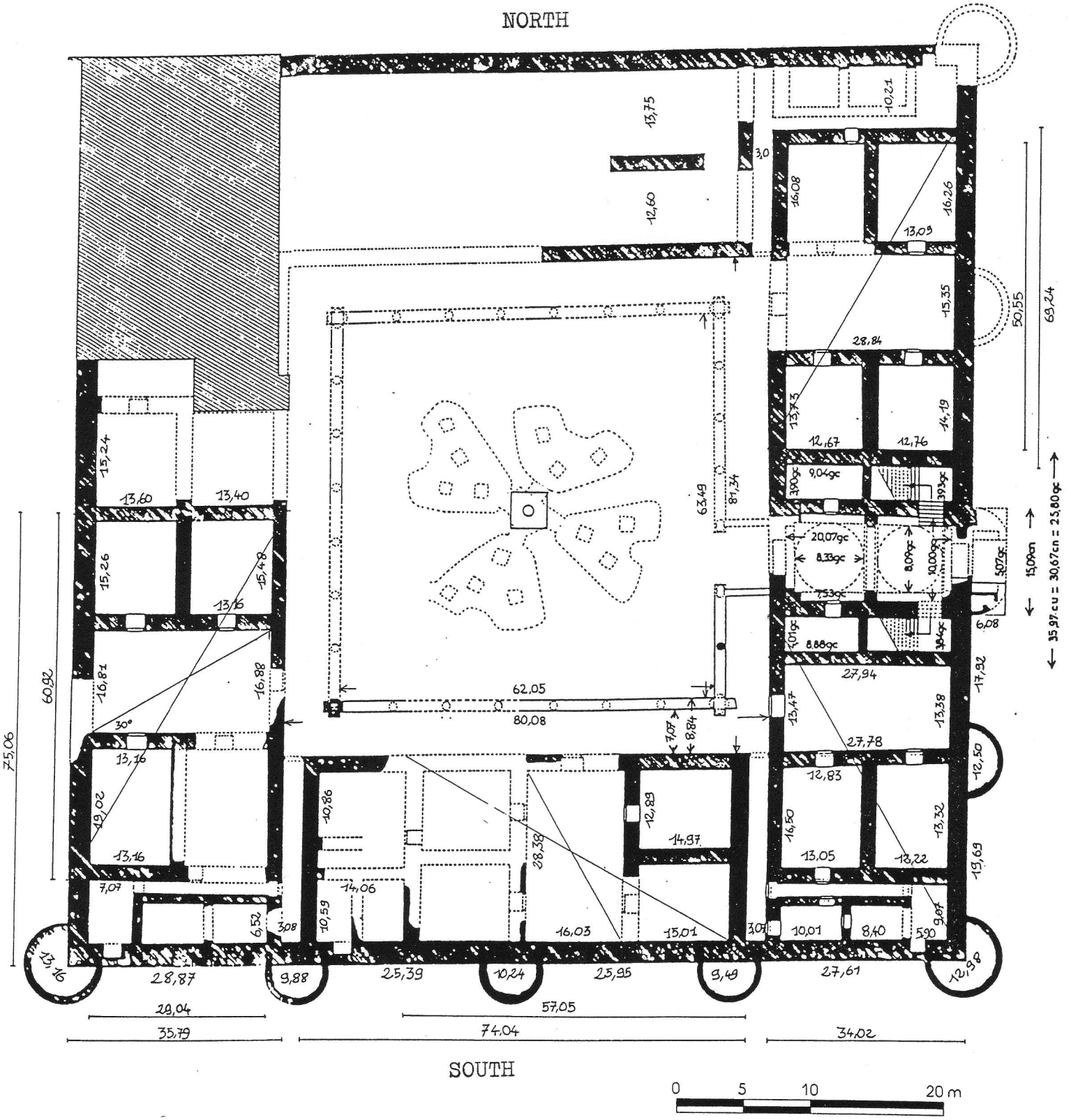
Les arpenteurs ont commencé par mesurer le mur sud, implanté sur une ligne passant approximativement par Jérusalem, ville distante de 68km où 'Abd al-Malik faisait précisément construire la Coupole du Rocher (7°Nord d'erreur de visée soit 10%) plutôt que perpendiculaire à la direction de La Mecque comme il en sera plus tard d'usage (31° d'écart). Ils ont mesuré 150 coudées umayyades de 0,452m soit 67,80m. Ils ont ensuite implanté l'angle nord-ouest à 67,80m = 150 coudées umayyades de distance de l'angle sud-ouest, et à 95,00m = 150 x 0,63m de distance de l'angle sud-est. L'erreur commise est de 0,52% sur la longueur de la diagonale, et l'angle sud-ouest n'est pas de 90° mais de 89°, valeur qui peut être vérifiée sur les vestiges. L'angle nord-est a enfin été implanté à 67,43m = 149,18 x 0,452m de l'angle nord-ouest et 68,51m = 151,57 x 0,452m de l'angle sud-est. La plus grande longueur de la façade orientale est liée à l'implantation d'un hall d'entrée qui dérange l'organisation du plan dans cette partie. L'erreur maximale est de 1,03%, ce qui reste raisonnable au regard des valeurs de 2% aujourd'hui admises pour le gros-oeuvre.

Les arpenteurs ont ensuite positionné la cour centrale. Entre murs périphériques, celle-ci est large de 80,08 coudées umayyades, elle est réduite d'une galerie périphérique au sol orné de mosaïques géométriques large de 7,07 coudées umayyades, protégée par un portique à colonnes. La zone centrale dallée s'étend sur 62,05 coudées umayyades au carré.

Les appartements du palais sont distribués sur le principe multimillénaire du *bayt* (devenu depuis le mot désignant la *maison* en arabe), où une grande pièce centrale ayant seule accès sur la cour distribue quatre autres plus petites diposées par paire sur les côtés. Ici, de petites pièces de service sont adjointes, équipées de latrines aménagées dans l'épaisseur du mur d'enceinte. L'ensemble des sols était orné de mosaïques, certaines à motifs végétaux. Les mesures de détail varient en fonction de choix d'arrangement général ; cependant, on saisit bien que ces appartements constituent des groupes de 60 ou 75 sur 35 coudées umayyades, que le *bayt* stricto-sensus compte 50 coudées umayyade de large pour une diagonale de 50 coudées noire de 0,53m dans l'esprit d'utiliser des proportions à 30° mais dont les imperfections affectent la géométrie des murs secondaires ; la pièce centrale du *bayt* obéït aux mêmes règles et offre ainsi un plan très déformé. Par contre, les dimensions du bloc d'entrée ou vestibule sont pour la plupart basées sur la grande coudée de 0,63m.



3) reconstitution du schéma de piquetage du palais de Qastal.



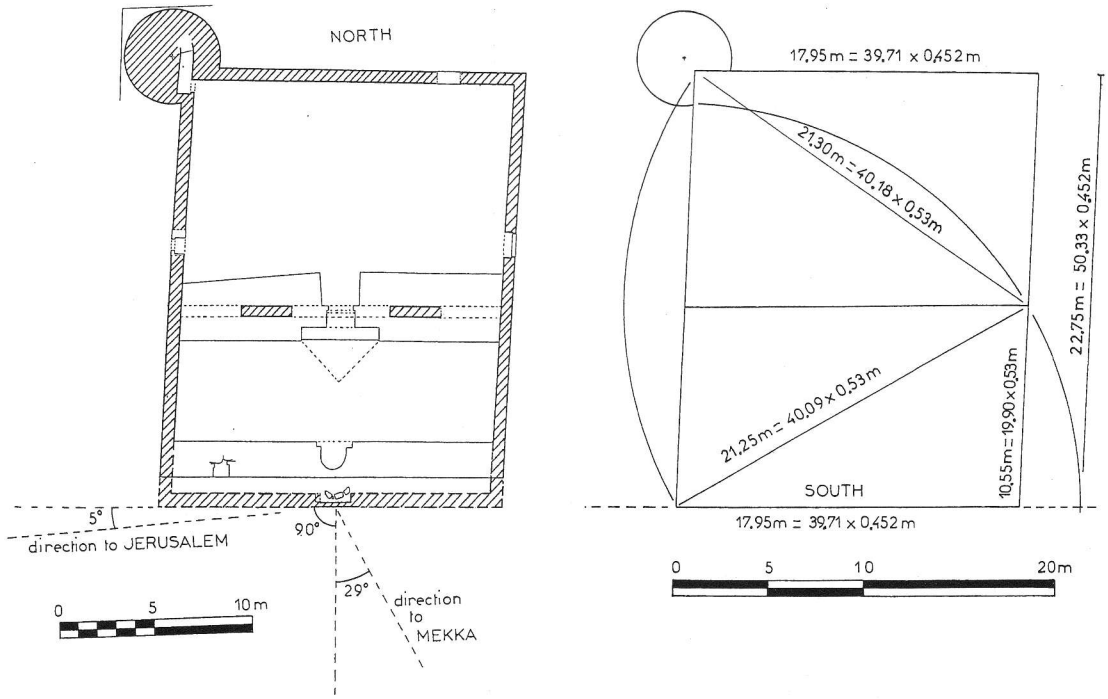
4) plan du palais de Qastal coté en coudées umayyades de 0,452m, sauf dans le vestibule d'entrée à l'Est où la grande coudée de 0,63m est notée GC.

la mosquée de Qastal :

Construite à quelques mètres au Nord du palais en même appareil de carreaux et boutisse en belle pierre calcaire, elle offre un plan rectangulaire très déformé, caratérisé par un minaret dans l'angle nord-est et une salle de prière s'ouvrant largement sur la cour par trois arcades de largeur inégale. Un sondage à l'extérieur du mur sud (*qibla*) a fait découvrir le *mihrab* (niche d'orientation) original de plan rectangulaire (profond d'une coudée umayyade et large de quatre) et restituer les dimensions originales : 50,33 coudées umayyades du Nord au Sud pour 39,71 d'Est en Ouest. La diagonale S-E/N-O de la cour est de 40,18 *coudées noires* de 0,53m, une bonne valeur en *coudées noires* de la largeur de l'édifice en coudées umayyades. La diagonale S-O/N-E de la salle de prière est de 40,09 *coudées noires* de 0,53cm alors que la profondeur de cette salle est de 19,90 *coudées noires* de 0,53m.

Ce rapport où le petit côté d'un rectangle est égal à la moitié de la diagonale démontre, dans l'exécution où seule la déformation du plan permet de respecter la règle, que cette règle trigonométrique relative aux angles de 30° et 60° était à l'époque non seulement connue mais volontairement mise en oeuvre.

Les arpenteurs umayyades ont commencé par installer le mur sud *qibla* sur une droite mieux alignée sur Jérusalem (écart réduit à 5°Nord et 29°Ouest par rapport à La Mecque), d'une longueur de 40 coudées umayyades (17,95m = 39,71 x 0,452m). Ils ont ensuite implanté l'angle nord-est de la salle de prière à 20 *coudées noires* de l'angle sud-est (10,55m = 19,90 x 0,53m) et à 40 *coudées noires* de l'angle sud-ouest (21,25m = 40,09 x 0,53m). Ce mur est a été prolongé jusqu'à 50 coudées umayyades (22,75m = 50,33 x 0,452m) pour fixer l'angle nord-est, à partir duquel a été implanté l'angle nord-ouest, toujours distant de 40 coudées umayyades prises d'Est en Ouest (17,95m = 39,71 x 0,542m) mais fixé à 40 *coudées noires* de l'angle sud-est de la cour (21,30m = 40,18 x 0,53m) : les diagonales de la cour et de la salle de prière ont les mêmes valeurs, leurs sens opposés impriment des profondeurs différentes à ces deux espaces.



5) plan de la mosquée de Qastal (en hachuré les parties umayyades) avec la cour au Nord et la salle de prière au Sud. A droite, reconstitution du schéma de piquetage de l'édifice utilisant la coudée umayyade de 0,452m et la coudée «noire» de 0,53m.

Outre ces deux bâtiments prestigieux, le site de Qastal a livré d'autres vestiges caractérisés par les mêmes techniques de construction en beau calcaire coquiller alternant carreaux et boutisses. Un barrage d'une longueur autrefois supérieure à 400m contenait quelques deux millions de mètres-cubes à l'époque umayyade : les trois assises les plus basses subsistant offrent encore les même mesures.

L'une des nombreuses carrières d'extraction de la pierre a été réaménagée en bassin découvert, dont des parties de murs compensent les irrégularités de nivellement naturel. La colonne à section cannelée d'une jauge hydrométrique n'a survécu que quelques temps à la stupide cupidité humaine qui sait trop bien que là où il y a de l'eau il y a de l'or... et qui cherche ce dernier là où il y avait la première richesse.

Enfin, de nombreuses tombes associées à des inscriptions en arabe d'une graphie angulaire archaïque caractéristique de la haute période umayyade, d'autres d'une graphie apparement plus tardive portant des dates de la haute période 'abbasside, ont été découvertes. Le relevé des orientations de ces vingt-sept tombes a mis en évidence la modification des usages en ce domaine : six tombes (dont deux portent des dates 'abbassides) offrent un grand axe orienté, conformément à l'usage contemporain, exactement perpendiculairement à La Mecque. Mais dix autres tombes ont un grand axe non pas orienté perpendiculairement à La Mecque (24° d'erreur) mais exactement aligné sur Jérusalem. Les autres tombes sont alignées perpendiculairement au Sud. La précision des orientations a donc été grandement améliorée par rapport à celles du château puis de la mosquée pour confiner à l'exactitude dès la fin de la période umayyade.

Mes travaux à Qastal font engranger les résultats suivants :

a) Trois unités de mesures différentes ont été utilisées simultanément par différents corps de métiers (architectes, arpenteurs, tailleurs de pierre...) : la coudée umayyade de 0,452m, la *coudée noire* de 0,53m et la grande coudée de 0,63m.

b) Ces mêmes unités de mesure sont utilisées par les arpenteurs pour implanter les plans du palais comme de la mosquée en combinant la coudée umayyade pour mesurer les côtés et l'une des deux autres coudées pour mesurer les diagonales dans un procédé de triangulation, suivant que des proportions à 45° ou à 30° sont recherchées. En utilisant suivant les principes de la trigonométrie des mesures qui ne sont qu'approximativement étalonnées et en s'abstenant délibérément de vérifier ou de corriger, les arpenteurs umayyades ont produit un résultat imparfait qui permet aujourd'hui de les suivre pas à pas.

c) Que des angles à 30°, 45° et 60° régissent les proportions en hauteur des vestiges encore subsistant et des restitutions certaines que l'on peut établir. Antonio ALMAGRO a fait les mêmes observations au palais umayyade de 'Amman tant pour le vestibule que pour le hall d'audience qui présentent de très nombreuses similitudes pour ce qui est de la conception des espaces tout autant que pour le décor ou les techniques de construction. Ces angles particuliers correspondent à des connaissances générales des lois trigonométriques.

d) Il est difficile de soutenir que les déformations du plan de la mosquée de Qastal sont dues au seul hasard. Si la correcte application des lois trigonométriques avec des unités de mesure imparfaitement étalonnées par les constructeurs umayyades offre une justification satisfaisante pour que celle-ci ait été préférée à la rectitude du plan, c'est bien que les bâtisseurs umayyades accordaient de l'importance à ce savoir trigonométrique.

De nombreux autres édifices umayyades ont été relevés. Les plans qui ont été publiés permettent pour la plupart de restituer la procédure d'implantation générale qui a été mise en oeuvre, à défaut de pouvoir restituer le tracé de chaque appartement. La plupart des auteurs donne également de nombreuses mesures de détails dont la transcription dans le système des mesures umayyade est souvent très aisée, mais qui n'a qu'exceptionnellement été envisagée, et encore qu'à titre d'hypothèse seulement. Il s'agit-là d'un domaine où les archéologues ont visiblement répugné à mettre les pieds.

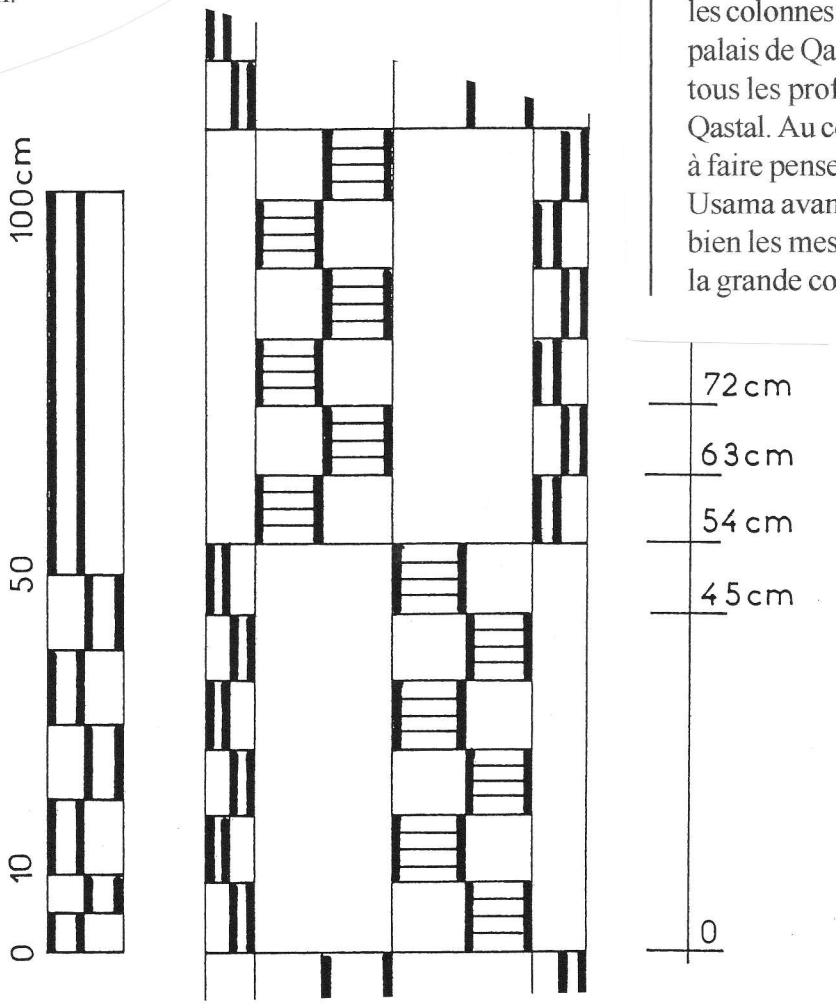
le Nilomètre, «base de tout savoir» :

Le Nilomètre de l'île d'al-Rawda portait une inscription 'abbasside vue par FOURMONT en 1747-1751 qui précisait que le monument actuel avait été établi en l'année 247 hégire soit 861 ap. J.-C.. D'autres inscriptions martelées par ordre de Ibn Tulun vers 872 ap. J.-C. confirmeraient sa reconstruction en 861 ap. J.-C. après que le premier Nilomètre érigé par Usama sous le règne de al-Walid Ier (705-715 ap. J.-C.) eût été emporté par les flots (4).

Tel qu'il se présentait, l'élément principal consistait en une haute colonne de section octogonale, mesurant 0,48m de diamètre, une valeur proche de la coudée légale. Le diamètre inscrit dans cet octogone est donc de 0,445m (tiens, n'est-ce pas là une mesure connue ?). L'ensemble de la colonne est divisé par des lignes transversales en 16 coudées mesurant en moyenne 0,5404m, les dix coudées supérieures sont subdivisées en 24 *qirat* par 24 lignes groupées par 4 disposées alternativement autour d'une ligne verticale : nous avons bien là l'exacte application des subdivisions mentionnées par HINZ : six *kabda* font bien 0,54m.

Comment se fait-il que pas un archéologue n'ait vu, depuis que ce Nilomètre est étudié, que cinq *kabda* font exactement 0,45m soit la coudée umayyade de al-Muwaqqar ? Comment se fait-il qu'aucun auteur n'ait jamais constaté que sept *kabda* font exactement 0,63m, la valeur de la grande coudée ou de la coudée à drap de Damas ? Comment se fait-il que les historiens n'aient pas relevé que la coudée du calife 'Umar compagnon et successeur du Prophète avant-même l'avènement de la dynastie umayyade, *al-dhira' al-'umariyya* d'une longueur de 0,72m consistait de fait en huit *kabda* suivant en cela la règle de la coudée royale ? C'est proprement stupéfiant, au sens de la diminution des capacités mentales que la consommation de telles substance fait craindre !

De fait, cette colonne atteste de quatre coudées pour les graduations, et de deux autres pour sa section. Sur ces six, quatre sont d'un usage antérieur à la période 'abbasside. Cet éclairage un peu nouveau fait ressortir le fait que rien ne prouve que la colonne umayyade n'a pas été remployée à l'occasion des travaux de réfection 'abbassides de 861 ap. J.-C.. Il faut encore remarquer que le piédestal de plan carré sur lequel repose cette colonne octogonale ressemble en tous points aux piédestaux supportant les colonnes de la galerie du portique entourant la cour du palais de Qastal relevé en place en 1983 (bloc A2) et que tous les profils des corniches relevés ici ont leur frère à Qastal. Au contraire d'une datation 'abbasside, tout porte à faire penser que cette colonne soit bien celle érigée par Usama avant 715 ap. J.-C.. Et cette colonne porte bel et bien les mesures de la coudée umayyade de 0,45m et de la grande coudée de 0,63m !

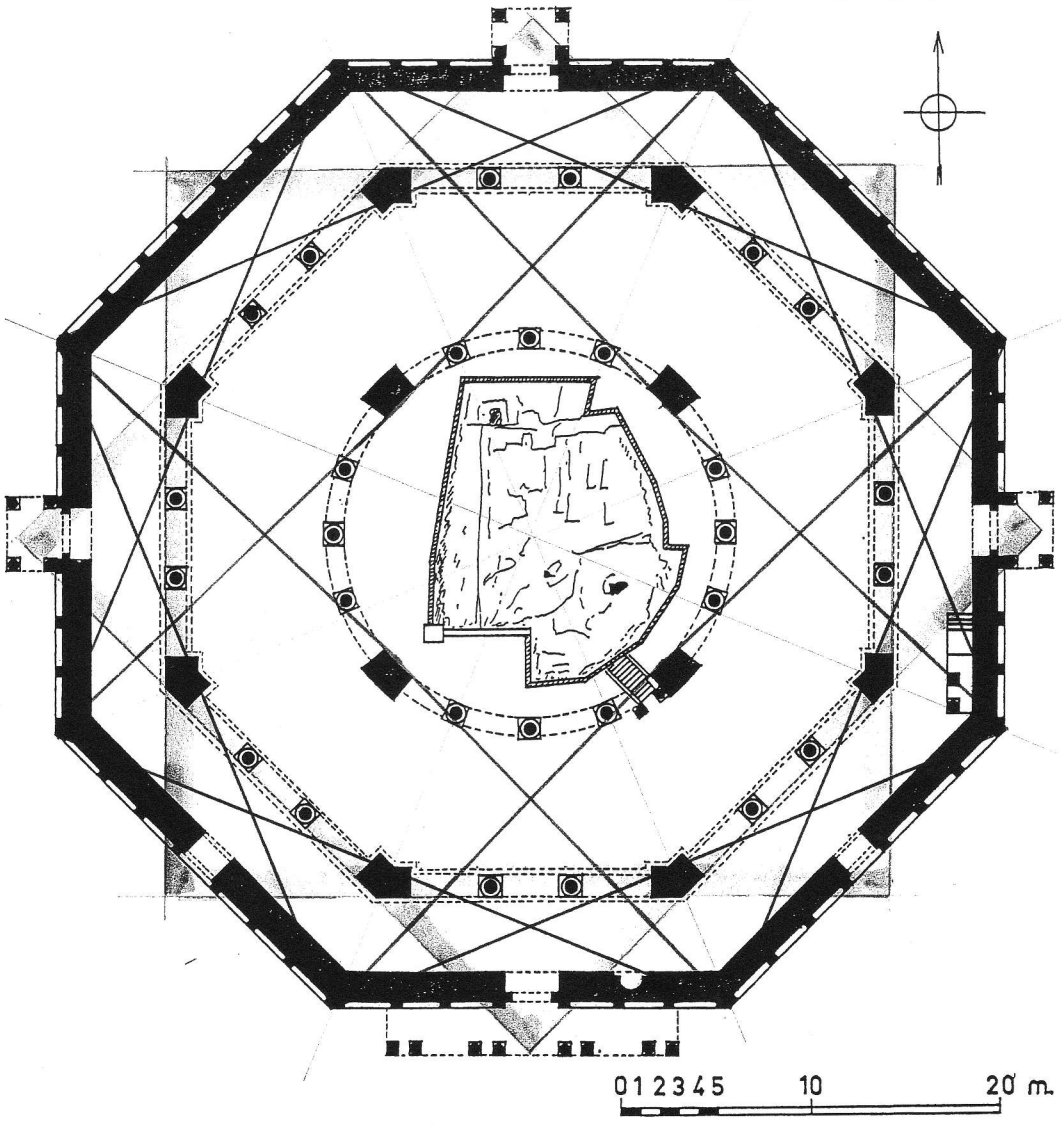


6) vue latérale de la colonne du Nilomètre de al-Rawda d'après la description qu'en donne CRESWELL, et fixation des mesures umayyades associées.

la Coupole du Rocher à Jérusalem, le premier édifice :

La datation umayyade de cet édifice et son attribution au calife ʿAbd al-Malik (685-705) ne souffre d'aucune hypothèque, il est même possible de préciser la période de construction à 688-691 au moment où l'autorité de ʿAbd al-Malik se trouvait contestée à La Mecque par ʿAbd Allah Ibn al-Zubayr, opposant à la dynastie des Umayyades qui s'était proclamé Commandeur des Croyants (680-692) et a rendu le pélerinage à La Mecque très difficile pour les sujets umayyades. ʿAbd al-Malik a ainsi créé un lieu de pélerinage de substitution : ces faits historiques éclairent également les questions d'orientation abordées à Qastal.

La première étude d'importance due à MAUSS en 1888-1889 tente de démontrer que le Dôme du Rocher imite les dispositions du Saint-Sépulcre tout voisin. Après CHOISY, ECOCHARD, tout aussi imprégné de culture occidentale, a voulu mettre en évidence l'identité absolue du tracé régulateur du Dôme du Rocher avec ceux des églises proche-orientales comme celles du Saint-Sépulcre, ou celle de Saint-Siméon à Qal'at Sem'an en Syrie septentrionale (5). Malheureusement, de tout-petits détails viennent altérer la crédibilité de ces démonstrations : le plan produit page 18 de la publication d'ECOCHARD ne se superpose vraiment pas au plan donné par CRESWELL dont il prétend pourtant être issu... Les plans publiés semblent presque tous avoir fait l'objet d'un redessin un peu hâtif et aucun d'entre-eux ne permet de contrôler l'application exacte des théories d'ECOCHARD.



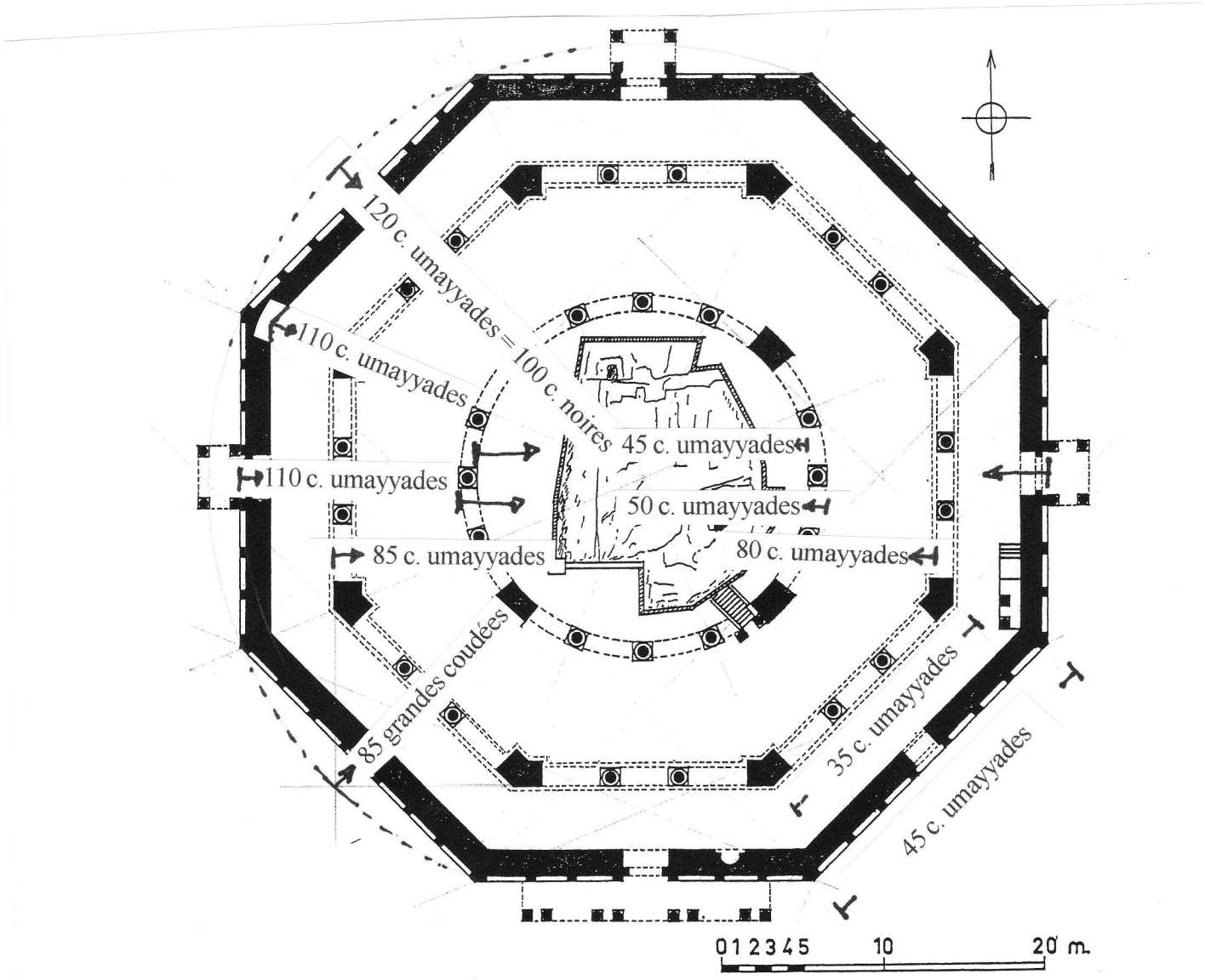
7) plan de la Coupole du Rocher à Jérusalem d'après GOLVIN. Le tracé du carré central montre que le tambour central (20,44m) n'est pas dessiné assez large par rapport à l'octogone extérieur (20,60m en moyenne) : cela ne concorde pas avec les mesures données par CRESWELL. Le tracé des deux octogones imbriqués l'un dans l'autre par rotation est par contre limpide.

Cette situation me fait préférer n'utiliser que des dimensions données dans le texte de CRESWELL qui a personnellement relevé cet édifice (6).

Le Dôme du Rocher présente un cylindre central d'un diamètre intérieur de 20,44m pour une hauteur de 20,40m, surmonté de la fameuse coupole originellement à double coque de bois, recouverte de feuilles de plomb et de cuivre doré à l'extérieur et de mosaïques polychromes à l'intérieur. Ce cylindre accueille la roche vénérée par les Musulmans ; il est entouré d'une arcatude au tracé octogonal et d'un mur de plan octogonal lui-aussi qui distribuent l'espace en deux déambulatoires conformément aux usages et rites circumbulatoires musulmans.

Le plus grand diamètre de cet édifice, circonscrit au grand octogone extérieur, s'établit à 54,15m, c'est à dire 100,18 *coudées noires* de 0,5404m telle qu'elle est étalonnée par le Nilomètre de al-Rawda, mesure curieusement donnée comme 'abbasside par ce même CRESWELL. Par ailleurs, cette dimension peut aussi s'écrire comme 120,33 coudées umayyades de 0,45m étalonnée à al-Muwaqqar comme au Nilomètre ou encore 119,80 coudées umayyades de 0,452m mesurée à Qastal.

L'épaisseur de ce mur extérieur est de 1,30m soit 4,12 x 0,452m, sa hauteur est de 9,50m (21,01 x 0,452m) sans compter le parapet qui le couronne d'une hauteur de 2,60m soit 4,12 x 0,63m. Les longueurs de chacune des huit faces de cette octogone extérieur varient, elle s'établissent



7bis) plan de la Coupole du Rocher à Jérusalem d'après GOLVIN, avec les principales cotes données dans le texte de CRESWELL exprimées en coudées umayyades de 0,452m ou en grande coudée de 0,63m.

en moyenne à 20,60m soit 45,57 coudées umayyades de 0,452m. La largeur totale de l'édifice s'établit à 49,73m, soit 110,02 coudées umayyades de 0,452m. Cette dimension de 110 coudées umayyades est particulière, elle est celle du diamètre du cercle exactement inscrit dans le plan de la maçonerie du mur pour en déterminer à la fois les huit faces intérieures aux huit angles intérieurs et les huit faces extérieures au milieu des côtés de l'octogone.

Le premier grand cercle extérieur de 120 coudées umayyades de diamètre conditionne les dimensions extérieures de l'arcature octogonale médiane : d'après les plans disponibles, les deux carrés dans lesquels est inscrit cet octogone médian voient leur diagonale établie vers 54m soit 120 coudées umayyades mais aussi environ 85 grandes coudées de 0,63m (85,71 coudées dont on sait qu'elle est étalonnée trop courte). Il est donc normal de retrouver sur les plans des valeurs variant entre 84,95 et 85,17 coudées umayyades de 0,452m pour les côtés de ces carrés. Le calcul permet d'établir que les huit faces extérieures de l'octogone médian offre une longueur moyenne de 35,20 coudées umayyades de 0,452m

Ce même jeu de carrés tournants permet, d'après les plans disponibles, de définir avec précision les angles intérieurs de la colonnade octogonale médiane : ils s'implantent à mi-distance de deux angles extérieurs de la construction distants de 85 coudées umayyades. Le cercle inscrit dans cet octogone médiant offre un diamètre de 80 coudées umayyades (36,28m/0,452m = 80,08 pour être exact).

En résumé, à partir de n'importe quel angle de l'octogone extérieur, le premier autre angle de cet octogone est distant de 20,60m en moyenne soit 45,57 coudées umayyades, l'angle suivant est distant de 85 coudées umayyades (entre 84,95 et 85,17) ; le troisième angle donne la largeur de l'édifice à 110 coudées umayyades (110,02 exactement) et le quatrième, définit l'emprise maximale à 120 coudées umayyades (119,80 exactement).

La troisième valeur de 110 coudées umayyades fixe également à la fois l'épaisseur du mur extérieur et le diamètre intérieur maximal. Cette valeur s'exprime moins bien en *coudées noires* : 49,73m/0,54m = 92,09.

La deuxième valeur de 85 coudées umayyades est également celle de la largeur extérieure de l'arcature octogonale médiane (entre 84,95 et 85,17 exactement) et du diamètre intérieur maximal inscrit dans le plan de cette arcature médiane, en fixant l'épaisseur de cette arcature d'une manière identique à celle observée pour le mur extérieur. Cette valeur s'exprime moins bien en *coudées noires* : 38,42m/0,54m = 71,15.

La première valeur de 45 coudées umayyades est également celle du diamètre intérieur du tambour supportant la coupole telle qu'elle est écrite par CRESWELL et non pas telle qu'on peut l'extrapoler des plans publiés à sa suite : 20,44m/0,452m = 45,22 coudées umayyades, ainsi que celle de la hauteur du cylindre ainsi constitué jusqu'à la naissance de la coupole (20,40m/0,452m = 45,13). Cette dimension ne s'exprime pas bien en *coudée noire* : 20,40m/0,54m = 37,78.

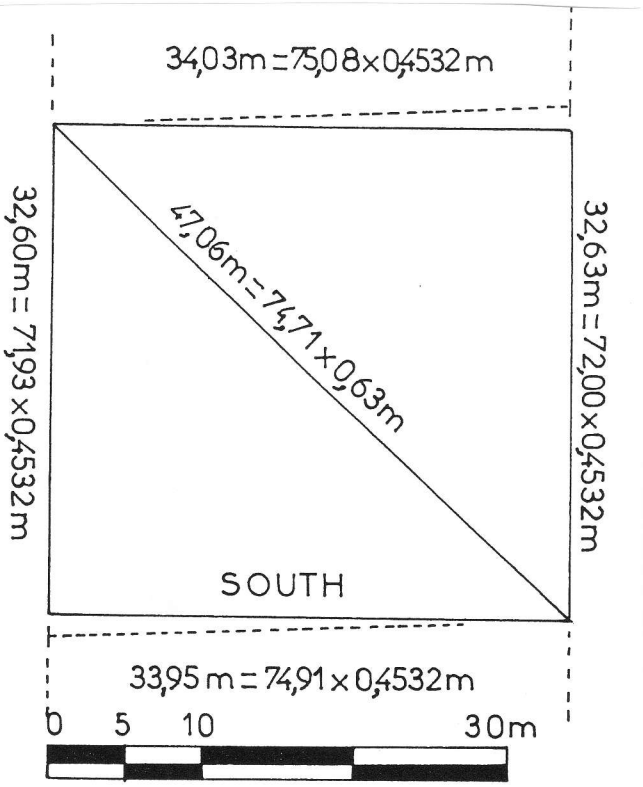
Le diamètre extérieur du tambour supportant la coupole est de 22,62m, soit 50 coudées umayyades (50,13 x 0,452m).

Les nombreuses mesures de détail que donne CRESWELL sont aisément transcriptibles en coudées umayyades de 0,452m ou en grande coudée de 0,63m mais moins bien en *coudées noires* de 0,54m.

Sans préjuger des sources architecturales auquelles ont puisé les concepteurs du plus ancien édifice musulman subsistant, il est indiscutable que celui-ci a été implanté et construit en utilisant une coudée de 0,452m qui sera, à quelques millimètres près, partout en usage dans les réalisations umayyades, en association avec les *coudées noires* de 0,53m-0,54m et grande coudée de 0,63m pour des opérations de triangulation. Ce terme est employé par CRESWELL lui-même à propos de la Coupole du Rocher : «*And Syria's part in this evolution included the system whereby the relationship between the outer circle and the inner ring was fixed by a system of triangulation, a similar (but slightly different) system having also been employed, as MAUSS has shown, for the Holy Sepulchre.*» (7).

d'autres réalisations umayyades en Jordanie :

Qasr al-Kharana est non daté mais porte dans l'entrée une inscription portant la date de 92 H. / 710 ap. J.-C. du règne de Al-Walid Ier.



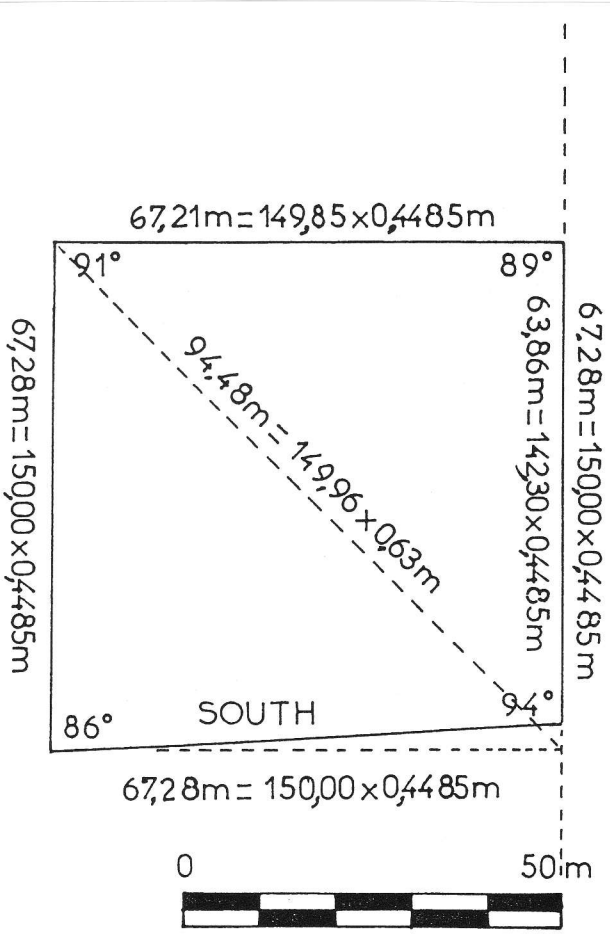
8) reconstitution du schéma de piquetage du petit château de Qasr al-Kharana caractérisé par deux premières implantations parallèles nord-sud.

Il s'agit d'un petit château très bien conservé dont les côtés sont de 75 coudées umayyades (0,4532m) et non pas de 150 coudées ; les mesures de détail et les proportions données par JAUSSEN & SAVIGNAC (8), en plan comme en élévation, correspondent parfaitement avec la descrition d'un édifice umayyade dont le chantier de construction aurait duré : la valeur de la coudée umayyade décroit de 0,4532m pour l'implantation à 0,445m pour la décoration, en passant par 0,45m pour le gros-oeuvre.

Le bain de Quasyr 'Amra est très connu par les fresques qui l'ornent et mettent en scène de nombreux personnages dont des dames plutôt déshabillées. Il est généralement attribué au règne d'Al-Walid Ier (705-715 ap. J.-C.), en raison-même de l'iconographie. L'on y voit six empereurs vaincus par al-Walid dont quatre sont identifiés par des inscriptions : Caesar (l'empereur byzantin), Rodéric (dernier roi wisigoth d'Espagne battu par les Arabes en 711 ap. J.-C.), Chosroes (empereur de Perse) et le Négus (roi d'Abyssinie). Bien que le tracé d'ensemble du plan ne fasse pas ressortir le trajet des arpenteurs triangulateurs, il ne fait aucun doute que les mesures intérieures et extérieures aient été fixées par les unités utilisées dans les autres édifices umayyades : les mesures figurant sur les plans antérieurement publiés sont aisément trancriptibles. Il en est de même pour le bain de Hammam as-Sarakh voisin du château byzantin réoccupé par les Umayyades de Qasr al-Hallabat.

Le site de al-Muwaqqar n'a pas fait l'objet de recherches archéologiques ; il n'est connu que par des descriptions anciennes et par la jauge hydrométrique de son réservoir (*birka*) portant l'inscription de la coudée umayyade et une dédicace de Yazid II (719-724 ap. J.-C.). Toutes ces descriptions chiffrées, celle de BRUNNOW & DOMASZEWSKI comme celle de MUSIL ou de CRESWELL (9), donnent des mesures parfaitement cohérentes avec les trois unités relevées à Qastal.

Plus tardif est l'ensemble de Khirbat al-Mafjar, plus connu sous de nom de Qasr-Jéricho. Construit sous le règne de Hisham (724-743) pour son neveu le futur al-



9) reconstitution du schéma de piquetage du palais de Khirbat al-Mafjar en perpendiculaire d'un grand axe nord-sud qui imprime sa marque sur l'ensemble du site.

Walid II (743-745), il s'agit d'un complexe incluant palais résidentiel, bains, piscine, mosquée, etc. dont tous les détails publiés attestent de l'emploi des mesures umayyades et des mêmes procédures d'implantation en triangulation autour d'un grand axe implanté nord-sud (10). Cependant, l'examen précis des mesures fait supposer une variation de la longueur de la coudée umayyade : 0,4485m pour l'implantation du palais, 0,445m et 0,45m pour les implantation et construction de la mosquée, du bain, de la salle du trône et de la piscine. Les élévations de ces différents édifices font ressortir l'emploi de proportions également basées sur les angles à 30°, 45° et 60°. La maîtrise des déformations en plan pour les proportions à 30° font penser que la *coudée noire* a vu sa longueur diminuée à 0,52cm, ce que l'analyse de certaines mesures de petits côtés de ces rectangles confirme.

Situé à quelques kilomètres de Qastal en bordure du nouvel aéroport de 'Amman, le palais de Mishatta est un vaste édifice carré habituellement daté du règne d'Al-Walid II (743-745 ap. J.-C.). Malheureusement, aucun plan d'ensemble n'a été publié ni même les exactes mesures de chaque façade et les valeurs angulaires de cet ensemble qui est quatre fois plus vaste que les autres palais (11). Il n'est donc pas possible d'effectuer les mêmes études de triangulation, de même que pour Qast al-Tuba, un autre palais rectangulaire «double» des autres dont les mesures disponibles varient d'un auteur à l'autre. Les dimensions générales comme de détail font suggérer l'emploi d'une autre coudée, la coudée légale (*al-dhira' al-Shar 'iyya*) mesurant 0,49m : mesurée au milieu du palais de Mishatta, les mesures extérieures sont de 147,00m de Nord au Sud et de 147,20m d'Est en Ouest, soit 300 *coudées légales* de 0,49m.

A l'intérieur de Mishatta, une partition en trois zones a été mise en oeuvre. Les zones est et ouest sont larges de 95 coudées umayyades (94,60 x 0,445m) alors que la zone centrale (incluant les murs) adopte la même valeur mais en grandes coudées : 59,80m = 94,92 x 0,63m. A défaut de triangulation, c'est la proportion entre des parties qui se trouve ici fixée par la valeur de racine de 2. Cette zone centrale est aménagée d'une vaste cour centrale.

Au Nord s'ouvre une salle de réception de type basilical comme à 'Amman ou plus tardivement à Madinat az-Zarah près de Cordoue, ici terminée par une coupole supportée par trois absides à l'instar de ce qui a pu être restitué pour le hall d'audience du palais de Qastal (*«Que Dieu bénisse cette famille qui habite à Al-Muwaqqar, jusqu'à Qastal al-Balqa', là où il y a trois absides.»* Kuthayyir 'Azza, panégériste de Yazid II). Cette salle du trône est encadrée par deux appartements adoptant le plan du *Bayt* avec pièce centrale distribuant quatre autres comme il en est d'usage dans tous les autres palais umayyades.

Le bloc d'entrée au Sud de la cour est aménagé d'une mosquée, reconnaissable à son *mihrab* (niche d'orientation) percé dans le mur d'enceinte et au fait que le décor végétal de pierre qui orne l'ensemble de l'enceinte à l'extérieur (aujourd'hui visible au Musée de Berlin) ne comporte pas d'animaux sculptés (lapins, renards, colombes, paons, etc.) dans cette partie-là alors qu'ils sont innombrables partout ailleurs.

interprétation générale :

Le caractère anthropomorphique de la coudée umayyade a sans doute favorisé la variation de sa longueur au cours de la période umayyade : cette variation se lit comme une réduction progressive, qui entraine une variation du rapport avec la grande coudée de 0,63m, variation qui est celle de la valeur expérimentale de racine de 2.

Concuremment, la possibilité de reconstituer une procédure d'implantation d'un édifice utilisant l'ensemble de ces coudées en usage durant la dynastie umayyade constitue un élément de forte présomption pour une datation umayyade. **C'est ainsi que doit être à mes yeux reconsidérée la datation des mesures gravées sur la colonne du Nilomètre de l'île de al-Rawda : tout concourt à faire penser que la colonne érigée par l'Umayyade Usama sous le règne de 'Abd al-Malik (685-705 ap. J.-C.) a bel et bien été remployée par les restaurateurs 'abbassides en 861 ap. J.-C.** . Ce monument fixe donc les principales mesures dès la plus haute époque musulmane et demeure, avec la Coupole du Rocher et l'ensemble palatial de Qastal, le témoignage architectural le plus ancien conservé de l'Islam.

- édifices construits sous 'Abd al-Malik (685-705 ap. J.-C.)
Coupole du Rocher 0,63m/0,4520m = 1,3938053...
Qastal 0,63m/0,4520m = 1,3938053...
non daté (antérieur à 710) :
Qasr al-Kharana 0,63m/0,4532m = 1,3901147... pour l'implatantion

- palais construits sous Al-Walid Ier (705-715) :
Jabal Says 0,63m/0,4502m = 1,3993780...
Nilomètre al-Rawda 0,63m/0,4500m = 1,4000000...
Qasr al-Kharana 0,63m/0,4500m = 1,4000000... pour la construction
Qasr al-Kharana 0,63m/0,4450m = 1,4157303... pour la décoration

- palais construits sous Yazid II (719-724) :
Al-Muwaqqar 0,63m/0,4500m = 1,4000000...
Al-Muwaqqar 0,63m/0,4450m = 1,4157303...

- palais construits sous Hisham (724-743) :
moyenne 0,63m/0,4487m = 1,4040561... en moyenne
Khirbat al-Mafjar 0,63m/0,4485m = 1,4046822... piquetage du palais
0,615m/0,435m = 1,4137931... piquetage du bain
0,63m/0,4450m = 1,4157303... piquetage de la piscine

- palais construits sous al-Walid II (734-744) :
Mishatta 0,63m/0,4450m = 1,4157303... pour la partition en 3
Qasr al-Tuba 0,63m/ ?

La valeur exacte de racine de 2 est 1,4142135...

10) évolution de la valeur expérimentale de racine de 2 révélée par les restitutions des piquetages umayyades (685-750 ap. J.-C.)

Est-il vain de se demander si le classement chronologique des édifices sur lesquels les observations ont pu être faites peut révéler la tentative des arpenteurs umayyades d'améliorer leurs procédés ? Est-il vraiment stupide de croire qu'ils se sont volontairement approchés de la valeur exacte de racine de 2 sous le règne d'Hisham à Khirbat al-Mafjar en améliorant l'étalonnage de leurs instruments?

Je ne serais pas aussi méprisant que certains savants français des siècles derniers... d'autant que de nombreuses pistes restent à explorer pour remonter aux origines de ces mathématiques appliquées.

des antécédents égyptiens ?

Quelques exemplaires matériels de coudées et des effigies honorant des architectes ou bâtisseurs nous sont parvenus depuis la plus haute antiquité égyptienne ou mésopotamienne.

La plus accessible de ces règles est la «*coudée royale*» conservée au Musée du Louvre ; elle mesure 0,525m d'après certains, 0,523m d'après d'autres auteurs (12). La petite photographie qu'en donne DAUMAS (13) montre qu'elle est subdivisée en 28 parts identiques, chacune mesurant donc 1,875cm. Une règle presque identique est conservée au Musée Egyptien de Turin (14). Il est généralement admis que cette coudée royale (*meh niswt*) en usage dès la IIème dynastie (IIIème millénaire av. J.-C.) est divisée en sept «mains» ou «palmes» (*sheser* ou *shesep*), regroupant ainsi les 28 doigts (*djeba*) par groupe de quatre (15).

La désignation de «*coudée royale*» fait instinctivement penser qu'il existe d'autres coudées. En effet, d'autres auteurs comme ERMAN & RAUKE omettent cette «*coudée royale*» pour ne mentionner qu'une «*petite coudée*» qui ne mesure qu'un pied et demi (0,30cm x 1,5 = 0,45m) tout en précisant que celle unité est divisée en six palmes (16). Contrairement à leurs illustres aînés, les auteurs plus récents n'hésitent plus à mentionner plusieurs coudées en précisant même qu'«*il existe aussi des multiples et des fractions de ces mesures adaptés à tous les usages*» (15). C'est ainsi que Christian JACQ, Maurizio DAMIANO-APPIA mais aussi Guy RACHET (17) mentionnent à la fois la «*coudée royale*» et une «*petite coudée utilisée par les architectes pour la construction, valant 6 palmes et 24 doigts.*»

Faut-il croire que les lois du hasard sont suffisantes pour expliquer que six palmes ou 24 doigts de 1,875cm donnent une longueur connue par ailleurs de 0,450m à cette «*petite coudée*» et que 34 de ces mêmes doigts cumulent 0,6375m ?

Ce même hasard est-il suffisant pour nous convaincre que ces trois valeurs de 0,450, 0,525m et 0,6375m sont liées par les relations trigonométriques simples relevées au début de cet article, mais ici caractérisées par un meilleur étalonnage ?

En effet,

0,450m / Cos 45° = 0,450m x $\sqrt{2}$ = 0,6363...m dont 0,6375m constitue une très bonne approximation (0,18% d'erreur) ;

0,450m / Cos 30° = 0,450m x $2/\sqrt{3}$ = 0,5196...m

dont 0,525m constitue une valeur bien mieux approchée (1,03%) que la *coudée noire* umayyade de 0,53m (1,96%) ou 'abbasside.

La valeur expérimentale de racine de 2 en Egypte dès le IIIème millénaire av. J.-C. s'établit ainsi par le rapport 0,6375m / 0,450m = 1,416666... alors que sa valeur exacte est de 1,4142135...

Un autre fait doit être relevé : alors qu'il est d'usage de s'étonner de la précision des implantations astronomiques des édifices égyptiens et de donner la pente des côtés à la minute d'angle voire à la seconde, les auteurs se refusent à donner les mesures exactes des côtés des pyramides par exemple, et donnent ces mesures en mètres ronds. «*L'orientation de la pyramide de Khéops stupéfie par sa précision. Aucun de nos appareils actuels ne permettrait un meilleur résultat. Elle mesurait à la base 440 coudées égyptiennes qui représentent environ 230 mètres. Sa hauteur ancienne était de 280 coudées, c'est-à-dire 146,60m*» (DAUMAS, p. 438). Ces valeurs des longueurs des côtés ne serait-elles pas sujettes à variation ? Il faudrait revenir aux mesures données par les compte-rendus des fouilleurs, travail que je n'ai pas eu l'occasion de fournir.

Le traitement statistique de l'ensemble des mesures fournies dans les textes de ces auteurs généralistes ne permet pas de mettre autre chose en évidence que la pyramide n'a pas de dimension-type (contrairement aux palais umayyades) mais que la «*coudées royale*» de 0,525m semble avoir été utilisée préférentiellement à la «*petite coudée*» pour la mesure des côtés, ce qui semble rationnel au regard de leurs noms respectifs. Par contre, il est fort possible que le couple «*petite coudée*» et coudée de 0,6375m ait été employé pour effectuer les opérations de triangulation, ce qui expliquerait le silence des auteurs contemporains confrontés aux variations et imperfections que cette méthode de triangulation engendre.

Ces auteurs n'auraient certainement pas passé sous silence l'application du 3-4-5 pythagoricien s'ils avaient pu la reconnaître. En effet, cette règle $a^2 + b^2 = c^2$ était connue des mathématiciens égyptiens comme en témoigne le papyrus Rhind (XVIII-XVIIème siècles av. J.-C.) ; il est aussi désormais admis que PYTHAGORE a passé plus de vingt-deux années à étudier les sciences égyptiennes notamment à Alexandrie avant d'édicter le théorème qui l'a rendu célèbre. Les tablettes en argile paléobabyloniennes découvertes à Sippar, datées vers 1.800 av. J.-C., témoignent du fait que les civilisations du Croissant fertile avaient également atteint un même niveau de développement en précisant la valeur de 1,4142136 pour racine de 2 = 1,4142135... alors que la valeur de 1,41666... était la plus communément utilisée (18) (soit 0,6375m / 0,45m).

Je reste parfaitement incompétent pour analyser les hiéroglyphes qui accompagnent chacune des subdivisions de ces règles égyptiennes et qui me semblent aussi complexes que peut être le fonctionnement d'une règle à calculs telle que les classes d'ingénieurs l'ont connue jusqu'à ce qu'elle soit détrônée par la calculette électronique ; il serait curieux que ces hiéroglyphes ne livrent pas quelque explication à confronter aux méthodes de triangulation mises en évidence pour les monuments musulmans.

en guise de conclusion

En résumé, nous avons deux systèmes.

Utilisé depuis le IIIème millénaire av. J.-C. en Egypte, le plus ancien combine deux coudées principales, la plus grande dite «*coudée royale*» de 0,525m divisée en 28 doigts regroupés en 7 palmes de 4 doigts, fixant à 6 palmes la «*petite coudée*» de 0,45m. Ces deux coudées et d'autres étaient exploitées dans des procédures qui restent à étudier d'après les compte-rendus des fouilleurs. Trente-quatre doigts égyptiens fixent la longueur d'une grande coudée à 0,6375m.

Plus récent, le système umayyade reste étalonné par Nilomètre de l'île de al-Rawda, en Egypte donc, dont rien ne prouve qu'il n'a pas été construit sous le règne de al-Walid I (705-715 ap. J.-C.). Basé sur une «*coudée noire*» mesurant 0,5404m en moyenne divisée en 24 doigts regroupés en 6 mains de 4 doigts, cette colonne fixe à 0,450m la longueur de la «*coudée umayyade*» confirmée par les découvertes faites au site de al-Muwaqqar et à 0,63m la longueur de la «*grande coudée*». L'étude des édifices umayyades du site de Qastal et d'autres démontre l'usage simultané de ces trois coudées pour la construction comme pour l'implantation des édifices d'après un système de triangulation.

Les deux systèmes de subdivisions obéissent globalement au même principe, les différences observées permettent aux deux systèmes de proposer des valeurs identiques pour les valeurs de la petite coudée fixée à 0,45m, ou presque pour les valeurs de la grande coudée de 0,63m / 0,6375m. Cette dernière valeur, égyptienne, s'intègre mieux dans le système de relations trigonométriques qui relient ces coudées entre-elles. Les lignes qui précèdent ont montré, pour les constructions de la première dynastie de l'Islam, comment la petite coudée était utilisée pour mesurer les côtés des édifices et les autres coudées pour mesurer leurs diagonales, en donnant la même valeur numérique mais avec une unité différente. Cette manière de faire permet de réaliser des implantations complexes comme le Dôme du Rocher en offre l'exemple sans avoir à manipuler des nombres irrationnels tels que «racine de 2» ou «2 sur racine de 3» : ces irrationnels-là sont réduits au rang de coefficients fixant les rapports d'étalonnage entre les différentes coudées dont les longueurs respectives apparaissent sur les règles en bois.

Sous les Umayyades, les côtés et diagonales d'un carré reprennent la commune mesure qu'ils avaient perdue avec les Grecs pythagoriciens ! La crise de l'incommensurabilité des côtés et des diagonales est ainsi résolue non sans élégance, avec un chic certain, oserai-je même dire .

La grande homogénéité des valeurs et des descriptions des coudées fera penser que les Umayyades ne sont pas les inventeurs des mesures qu'ils utilisent. Il faudra donc admettre que les procédés de triangulation trigonométrique utilisés par les Umayyades avec ces mesures-là étaient également connues des inventeurs de ces mesures, probablement en Egypte dès la IIème dynastie au début du IIIème millénaire av.J.-C..

Frédéric MORIN

NOTES :

(1) W. HINZ : article *Dhira'*, apud *Encyclopédie de l'Islam*, Paris, 1965, tome 2, pp. 238-239.
(2) Bien qu'incomplète, la publication la plus accessible sur les recherches archéologiques à Qastal et la restitution architecturale du palais reste ARCHEOLOGIA N°206 (Octobre 1985), pp. 46-57.
(3) K.A.C. CRESWELL : *Early Muslim Architecture, Part One The Umayyads*, 2 vol., Clarendon Press, Oxford, 1932, 1969, pp. 496-497. Cette monumentale édition in folio a fait l'objet d'une présentation moins inaccessible : K.A.C. CRESWELL : *A short Account of Early Muslim Architecture*, Penguin Books 1958, nouvelle impression Librairie du Liban, Beyrouth, 1968 encore sur le marché en 1982 et où l'on peut retrouver l'essentiel des descriptions qui manquent ici.
(4) K.A.C. CRESWELL : *A short Account of Early Muslim Architecture*, pp. 292-296.
(5) Michel ECOCHARD : *Filiation de monuments grecs, byzantins et islamiques. Une question de géométrie*, Paris, Librairie orientaliste Paul Geuthner, 1977.
(6) K.A.C. CRESWELL : *A short Account of Early Muslim Architecture*, pp. 17-33. Le plan d'illustration du présent texte est celui donné par Louis GOLVIN : *Essai sur l'architecture religieuse musulmane*, vol. II : *L'art religieux des Umayyades de Syrie*, éd. Klincksieck, Paris, 1971, p. 43, fig. 4.
(7) K.A.C. CRESWELL : *A short Account of Early Muslim Architecture*, page 35.
(8) JAUSSEN & SAVIGNAC : *Les châteaux arabes de Qusayr Amra, Haraneh et Tuba, mission archéologique en Arabie*, Paris, 1922
(9) K.A.C. KRESWELL : *Early Muslim Architecture, Part One The Umayyads*, 1969, pp. 496-497.
(10) R.W. HAMILTON : *Khirbat al-Mafjar, an Arabian Mansion in the Jordan Valley*, Oxford, 1959.
(11) K.A.C. CRESWELL : *A short Account of Early Muslim Architecture*, pp. 124-134.
(12) Je détiens deux triple-décimètres de même marque Graphoplex dont l'écart de mesure pour 30cm atteint 1mm : il n'est donc pas étonnant d'observer ces 2mm d'écart pour la lecture en mètres de cette unité de 52cm.
(13) François DAUMAS : *La civilisation de l'Egypte Pharaonique*, Arthaud, Paris, 1965, p. 652, ill. 248.
(14) Arne EGGEBRECHT : *L'Egypte ancienne*, Bordas, 1986, p. 390
(15) Maurizio DAMIANO-APPIA : *L'Egypte, dictionnaire encyclopédique*, Gründ, 1999, p. 176.
(16) Adolf ERMAN & H. RAUKE : *La civilisation égyptienne*, Grande Bibliothèque Payot, reprint 1994 de la traduction française 1952, éd. originale 1923, p. 474.
(17) Guy RACHET : *Dictionnaire de la civilisation égyptienne*, Larousse - Les référents, 1998, p. 210.
(18) Barthel HROUDA : *L'Orient ancien*, Bordas, 1992, pp. 249-250.
(19) Denis GUEDJ : *L'empire des nombres*, Gallimard Découverte, 1996, pp. 82-85.